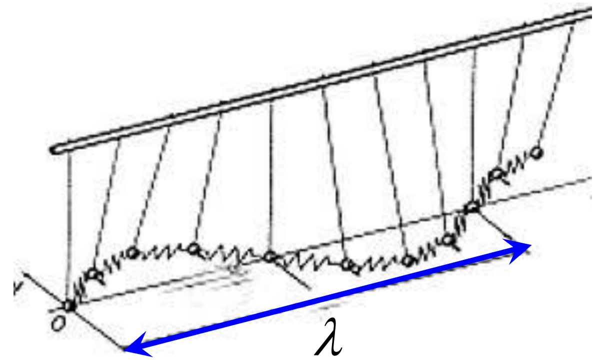
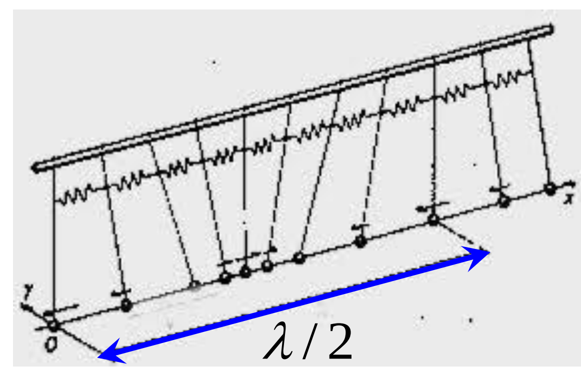
Vlnění – mechanické vlnění

- **Vlnění -** šíření vzruchu nebo oscilací
- Vlnění můžeme rozdělit na **mechanické**, jehož typickým příkladem je zvuk, a **elektromagnetické**, které vzniká při zrychleném pohybu nabitých částic nebo při změnách elektronové struktury látek.
- Šíření mechanického vlnění je vázáno na hmotné prostředí(kontinuum), zatímco elektromagnetické vlnění se může šířit i vakuem.
- V tomto výkladu se budeme zabývat pouze **mechanickým vlněním.**
- Mechanické vlnění šířící se trojrozměrným kontinuem můžeme rozdělit podle směru, ve kterém kmitají částice kontinua vzhledem ke směru šíření rozruchu, na **příčné (transverzální)** a **podélné (longitudinální)**.
- **Šíření příčného vlnění** je omezeno na pevné látky, protože vyžaduje přítomnost tečných napětí. Ta se v kapalinách a plynech nemohou trvale udržet, proto se v nich příčné vlnění rychle utlumí.
- **Podélné vlnění** je podmíněno přítomností normálových napětí a může se šířit všemi druhy prostředí.

- příčné vlnění

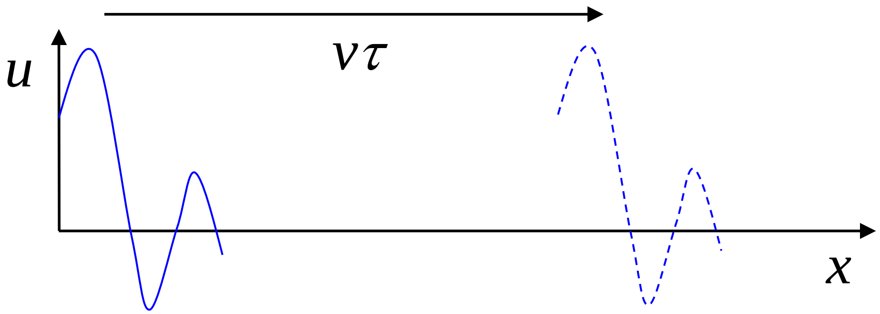


- podélné vlnění



Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

• vlna s výchylkou: $u(x,t)$



• Rychlost, s jakou se **rozruch** šíří prostředím, označujeme jako rychlost šíření vlnění neboli **fázovou rychlost *v*.**

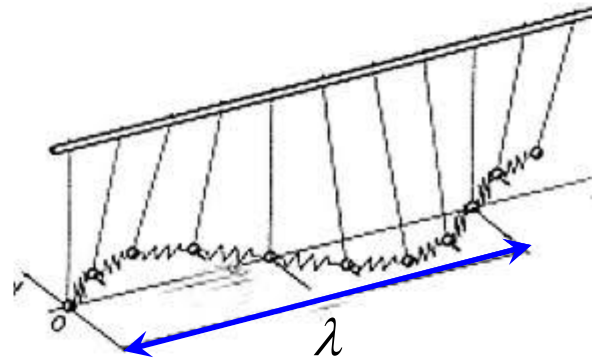
• Pokud zdroj vlnění (kmitající částice kontinua) koná harmonický pohyb, označíme vzniklé vlnění jako **harmonické vlnění**. Frekvence harmonického kmitu bude i frekvencí harmonického vlnění. Zdroj v počátku bude konat harmonický pohyb o výchylce:

$$u(0,t) = A\cos(\omega t)$$

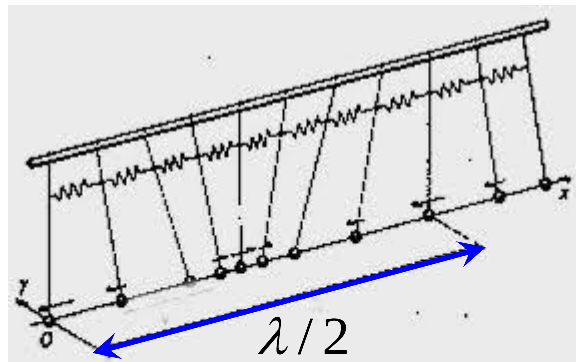
• Rozruch se bude šířit podél osy *x* fázovou rychlostí *v* tak, že do nějakého bodu o souřadnici *x* dorazí za čas $\tau = x/v$, výchylka v bodě *x* bude tedy stejná jako výchylka zdroje v čase: $t - \tau = t - x/v$:

$$u(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

• příčné vlnění

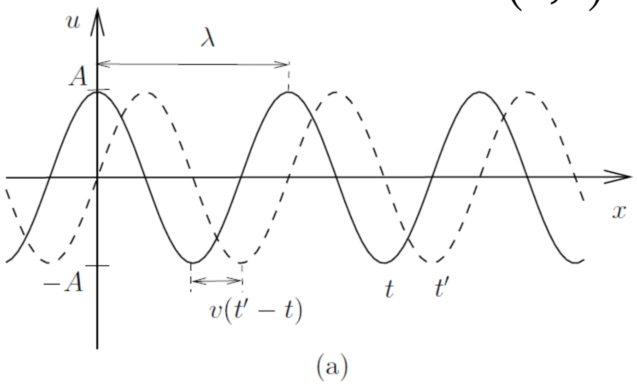


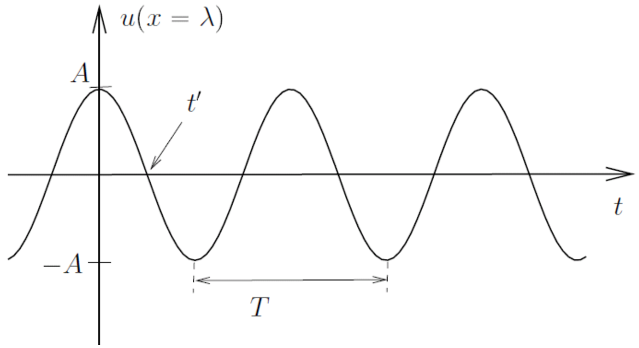
• podélné vlnění



Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

- **Vlnová funkce:** $u(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x}{v})$





- Minimální vzdálenost mezi dvěma body, které při šíření vlnění kmitají ve stejné fázi označujeme jako **vlnovou délku** λ.

$$u(x+\lambda,t) = u(x,t)$$

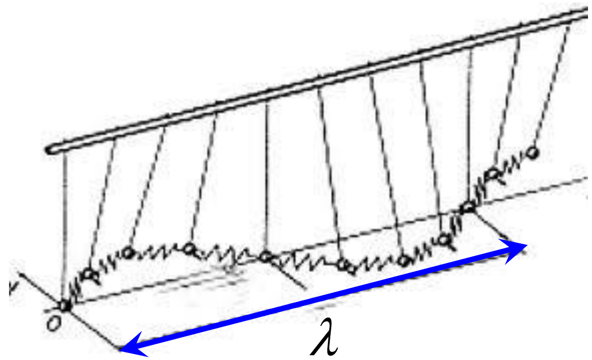
- **Perioda** T značí nejkratší dobu opakování stejné výchylky v daném bodě x.

$$u(x,t+T) = u(x,t)$$

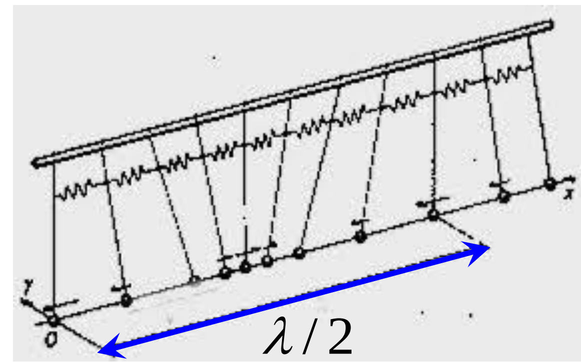
$$A\cos\omega(t + T - \frac{x}{v}) = A\cos\omega(t - \frac{x}{v}) \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$A\cos\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x-\lambda}{v}) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{v}) \Rightarrow \lambda = vT$$

- příčné vlnění



- podélné vlnění

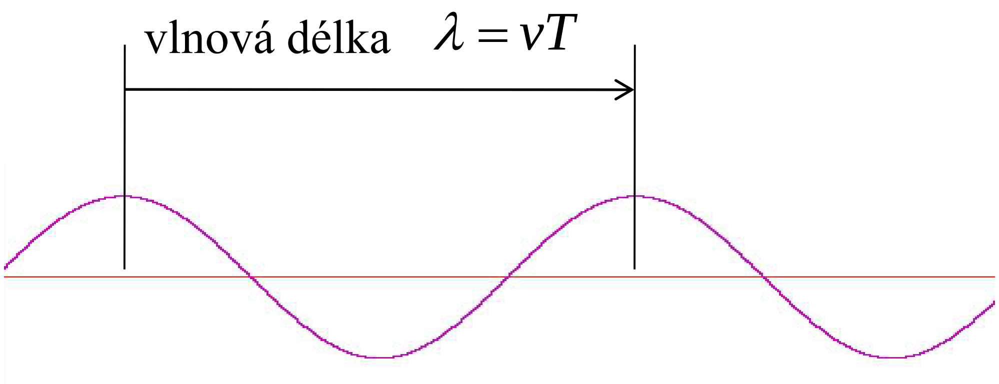


Souvislost frekvence a vlnové délky

- vlna: $\xi(x,t) = f(x - vt)$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$



perioda kmitů T

frekvence $f = \dfrac{1}{T}$

úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$

vlnová délka λ

vlnočet $\dfrac{1}{\lambda}$

úhlový vlnočet $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (velikost vlnového vektoru)

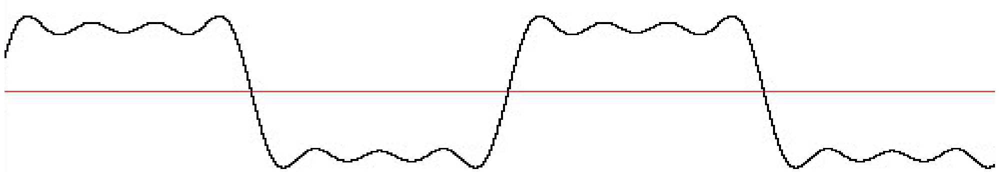
Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

- Zavedeme-li **vlnové číslo(vlnočet)** k vztahem:

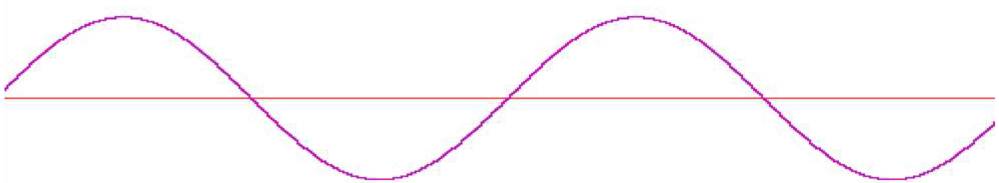
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

můžeme vlnovou funkci přepsat do tvaru:

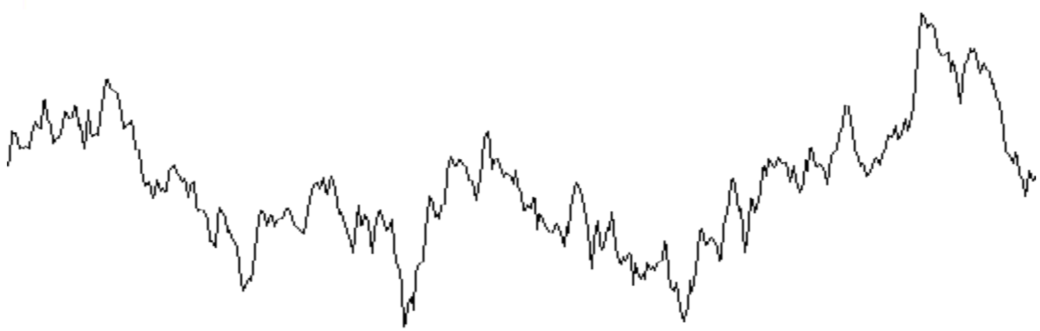
$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \longrightarrow Ae^{i(kx-\omega t)}$$



periodické vlnění



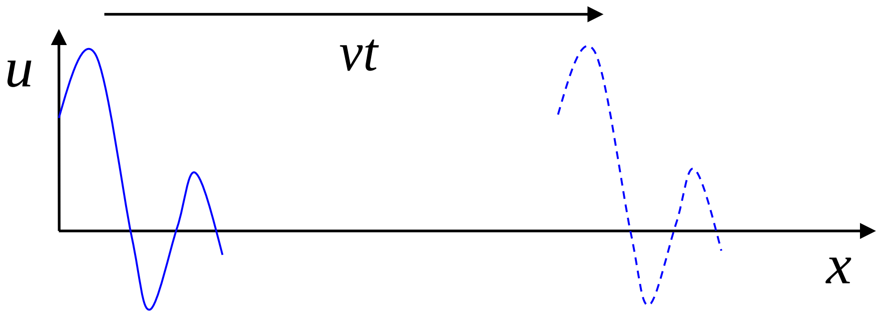
periodické harmonické vlnění



neperiodické vlnění

Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

• vlna s výchylkou: $u(x,t) = f(x \pm vt)$



• V homogenním prostředí je rychlost *v* konstantou nezávislou na *x* a *t*, potom pro druhé parciální derivace složené funkce podle souřadnice a času platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x - vt) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt)$$

• V jednorozměrném případě dostáváme tedy **vlnovou rovnici** ve tvaru: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

• Princip superpozice: je-li u_1 a u_2 řešení je $u_1 + u_2$ také řešení

• Odvození **vlnové rovnice** pro trojrozměrný případ je obdobné:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad kde \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

- **Vlnová rovnice**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \quad tj. \quad \Delta u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- **Vlnová rovnice** ve sférických souřadnicích:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- Zavádí se substituce:

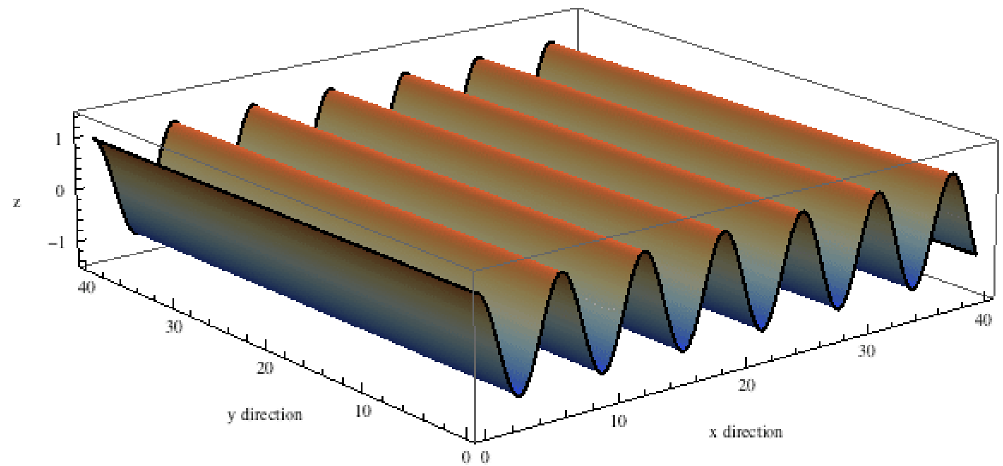
$$u(r,t)=\frac{w(r,t)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Harmonické vlnění

- harmonická vlna: $u(x,t) = A\cos(kx - \omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]$

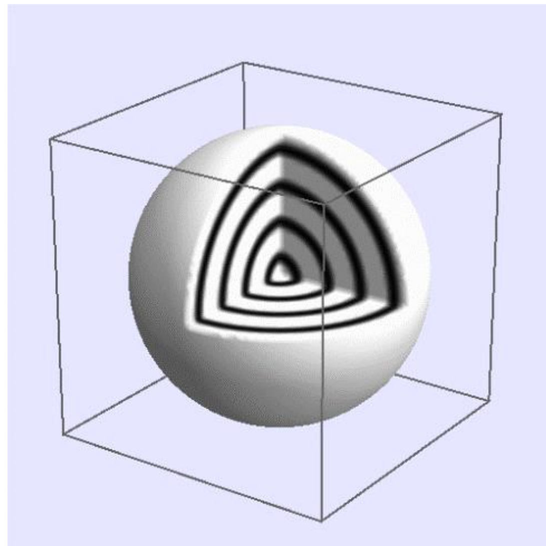
rovinná vlna

$$u(\vec{r},t) = A\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]$$

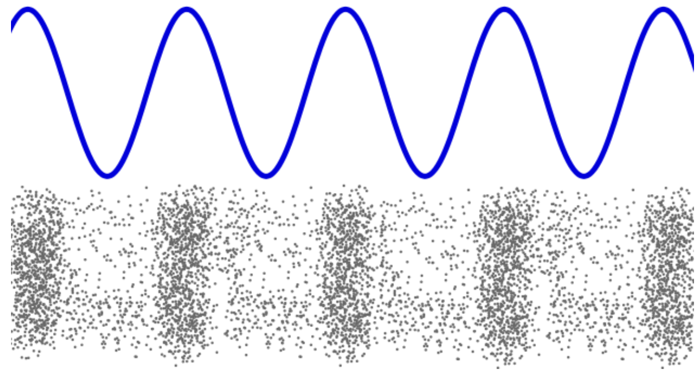


- **sférická vlna**:

$$u(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr - \omega t) = \mathrm{Re}\left[\frac{a}{r}e^{i(kr-\omega t)}\right]$$



Zvuk



- plyn se pohybuje → mění se jeho hustota → změna tlaku
- nerovnoměrné rozložení tlaku → pohyb plynu
- vztah mezi tlakem a hustotou: $p = f(\rho)$
- rovnovážný tlak p_0= 1.0133 bar = 1013.3 hPa, zvuk : $p_e = p - p_0$

dodatečný tlak

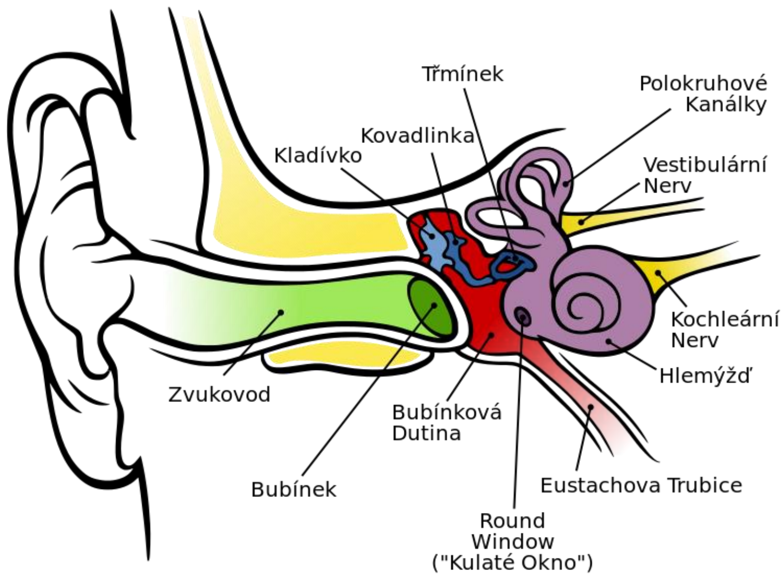
- hladina akustického tlaku $I[\mathrm{dB}] = 20 \log\left(\frac{p_e}{p_{ref}}\right)$

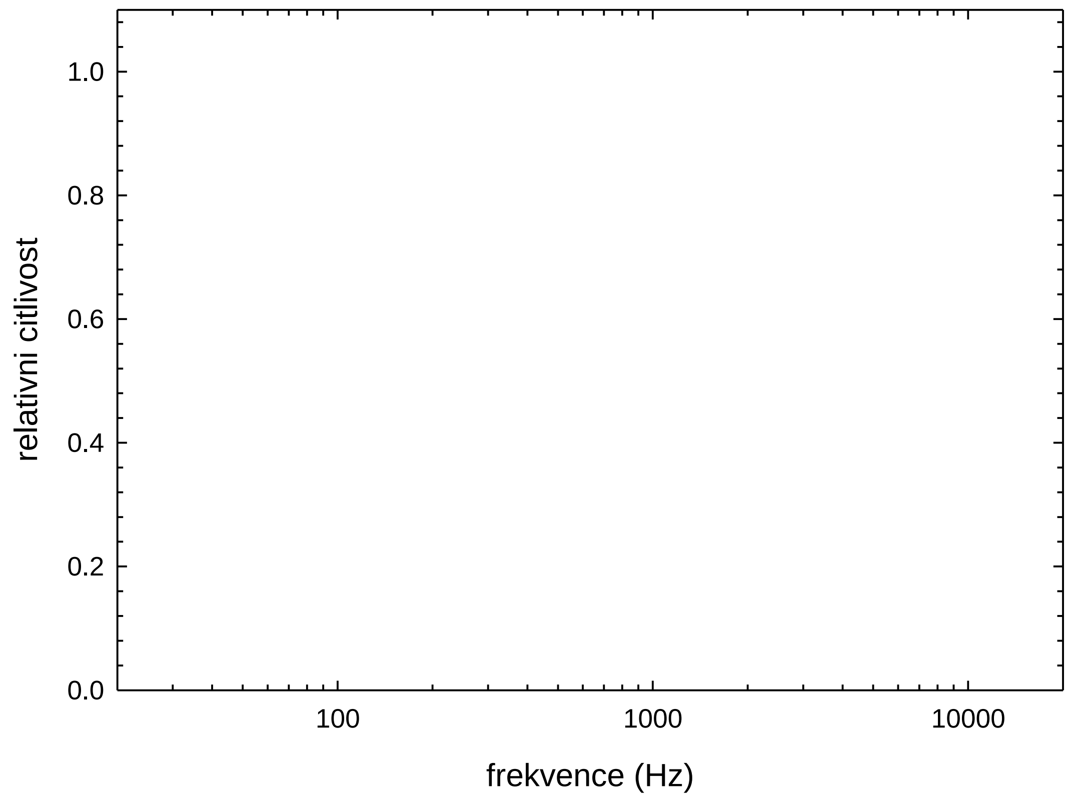
$$p_{ref} = 2\times10^{-10}\ \mathrm{bar} = 2\times10^{-5}\ \mathrm{Pa}$$ (0 dB, práh slyšení)

- hlasitý hovor: 60 dB ($p_e = 2 \times 10^{-2}$ Pa)
- práh bolesti: 120 dB (p_e = 20 Pa)

Rychlost zvuku

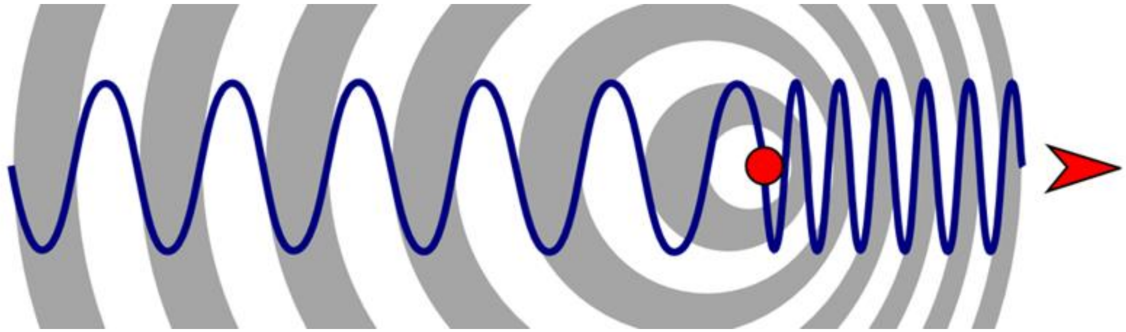
- frekvenční rozsah, který je člověk schopen slyšet: 20 Hz – 20 kHz
- odpovídající rozsah vlnových délek: 18 mm – 18 m
- citlivost lidského ucha na různé frekvence je různá



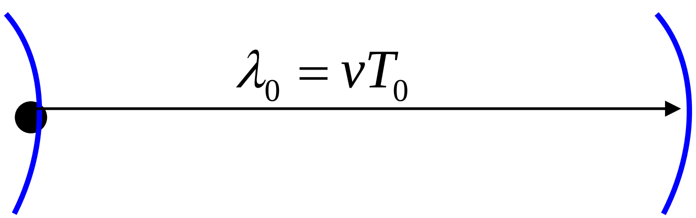


Dopplerův jev

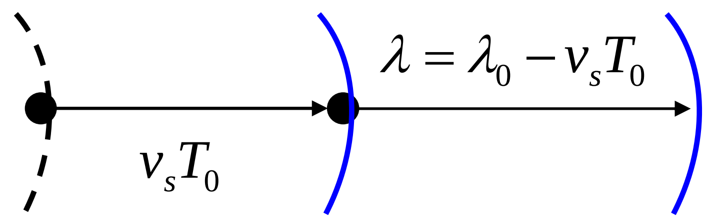
- Christian Doppler, Praha 1842
- pohybující se zdroj vlnění



- **zdroj v klidu**
- perioda vlnění: T_0
- frekvence: $f_0 = 1 / T_0 = v / \lambda_0$



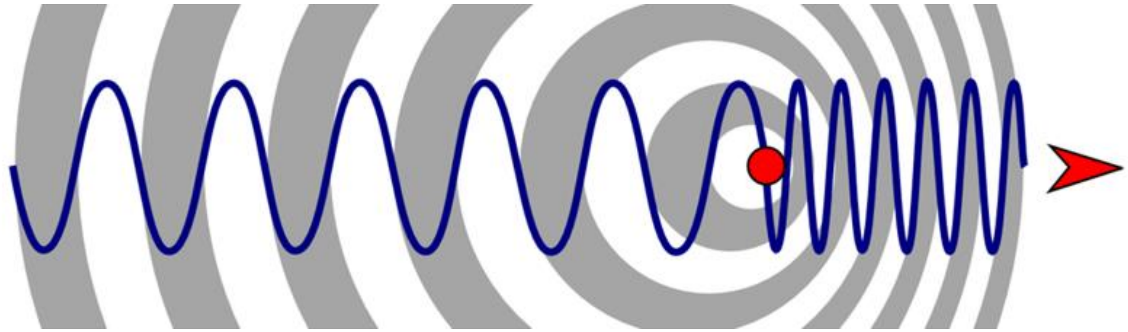
- **zdroj v pohybu**
- perioda vlnění: T
- frekvence: $f = 1 / T = v / \lambda$

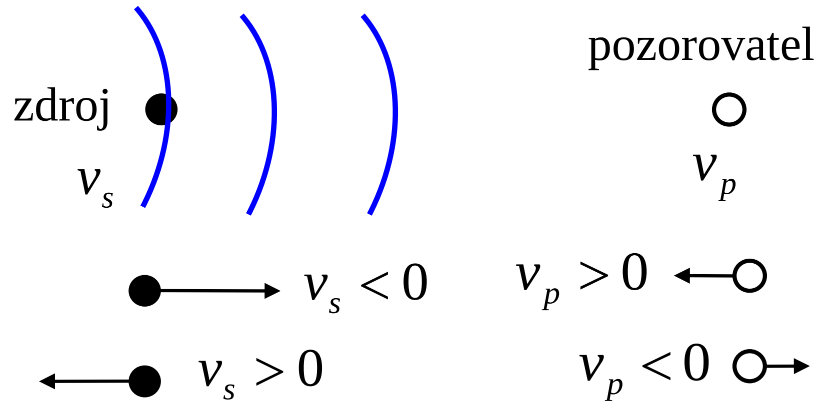


$$f = f_0 \frac{v}{v - v_s}$$

Dopplerův jev

- Christian Doppler, Praha 1842
- zdroj se pohybuje *k nám*:
- frekvence: $f = f_0 \dfrac{v}{v - v_s}$
- vlnová délka: $\lambda = \lambda_0 - v_s T_0$



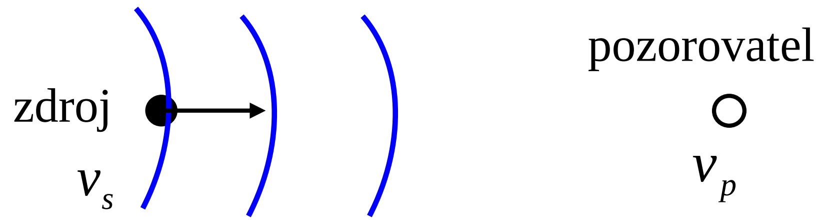


- zdroj se pohybuje *od nás*:
- frekvence: $f = f_0 \dfrac{v}{v + v_s}$
- vlnová délka: $\lambda = \lambda_0 + v_s T_0$

- frekvence vlnění $f = f_0 \dfrac{v + v_p}{v + v_s}$

Dopplerův jev

- frekvence vlnění $f = f_0 \dfrac{v + v_p}{v + v_s}$



- zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí zvuku

$$v_s = -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \infty$$

- zdroj se pohybuje od stojícího pozorovatele rychlostí zvuku

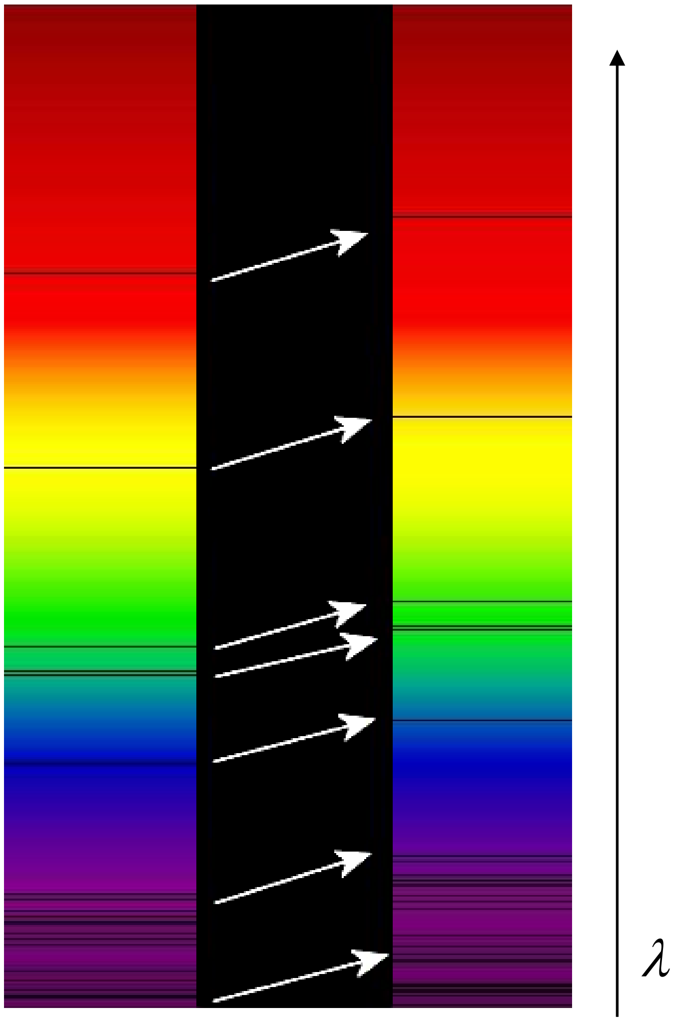
$$v_s = v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \frac{1}{2} f_0$$

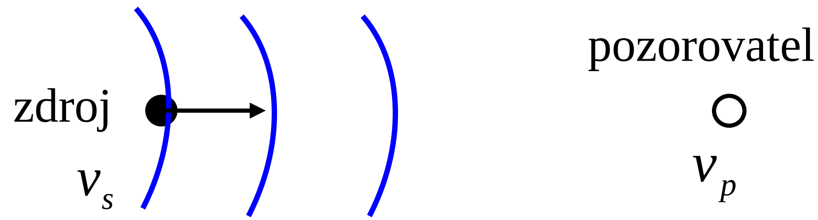
- zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí převyšující rychlost zvuku

$$v_s < -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f < 0$$

Rudý a modrý posuv

• absorbční spektra hvězd





• rudý posuv – hvězda letící od nás

• modrý posuv – hvězda letící k nám

Odraz vlnění

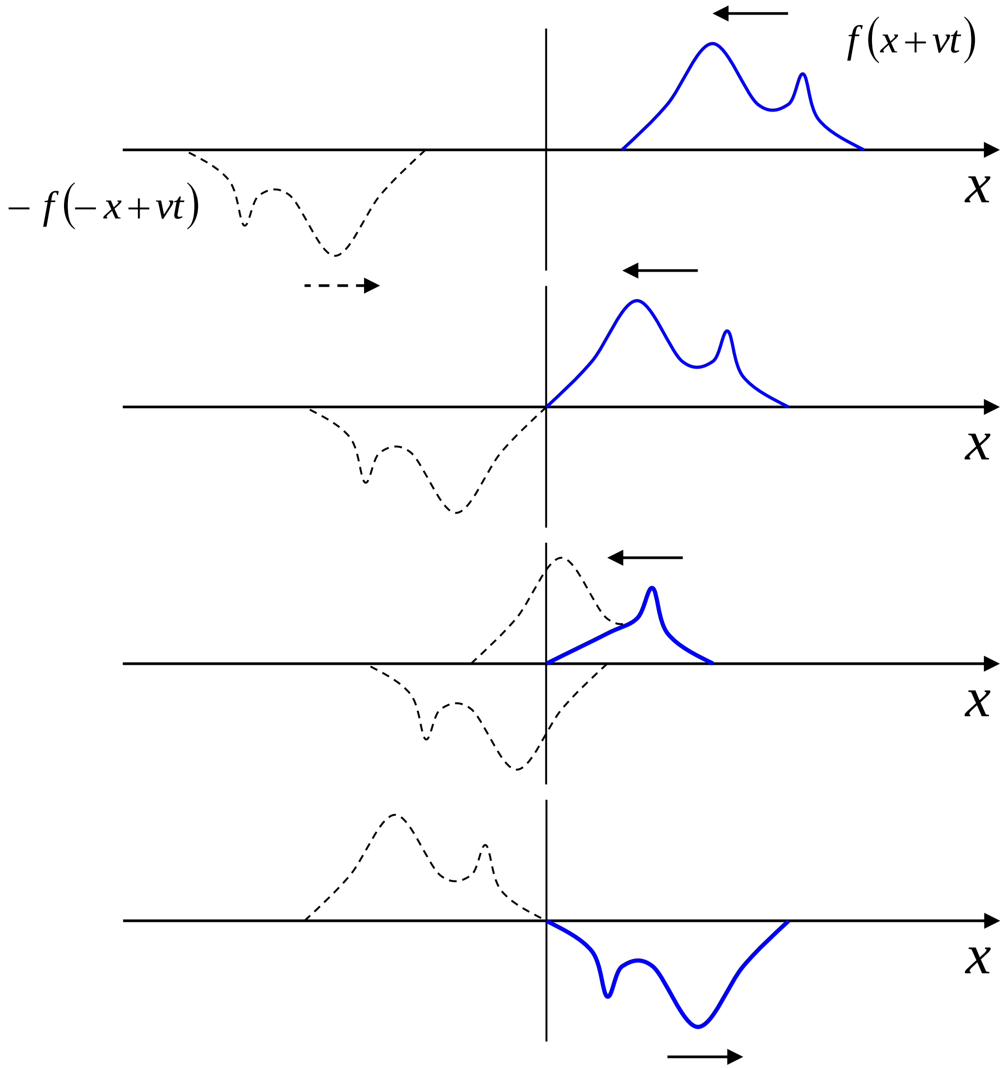
- obecná vlna

$$y = f(x+vt) + g(x-vt)$$

- $x = 0 \rightarrow y = 0$

$$g(-vt) = -f(vt)$$

$$y = f(x+vt) - f(-x+vt)$$



Stojaté vlnění

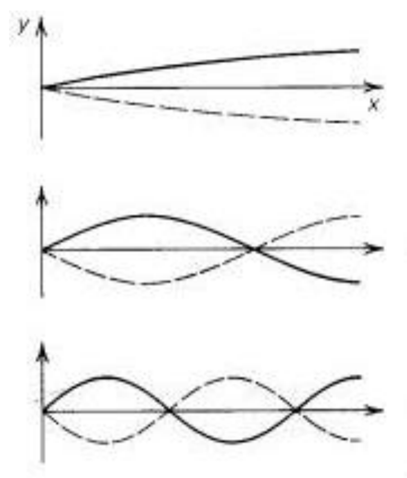
- odraz periodické vlny

$$y = f(x+vt) - f(-x+vt)$$

$$f(x+vt) = e^{i\omega(t+x/v)}$$

$$-f(-x+vt) = -e^{i\omega(t-x/v)}$$

$$y = 2e^{i\omega t}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) = 2e^{i\omega t}\sin(kx)$$



- uzly $\quad \frac{\omega x}{v} = kx = \pi n \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

Stojaté vlnění

- vlny v ohraničené oblasti
- struna délky *L* upevněná na obou koncích

$$y = 2e^{i\omega t}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) = 2e^{i\omega t}\sin(kx)$$

- uzly musí být v $x = 0$ a $x = L$

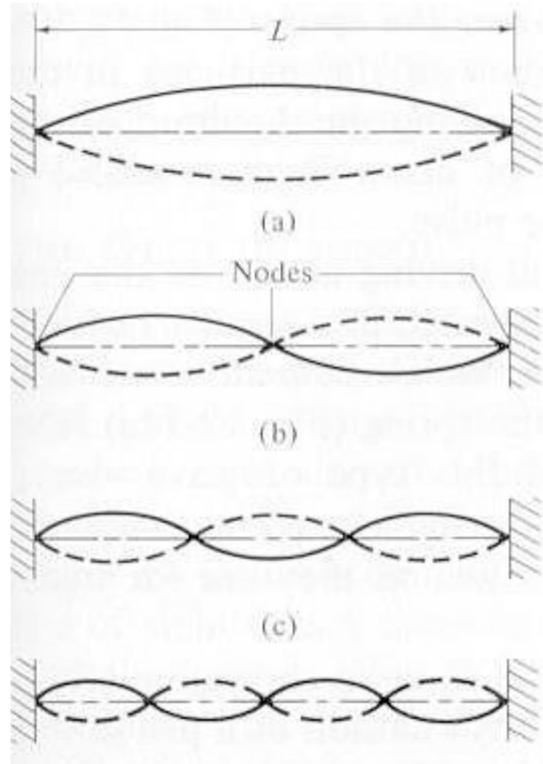
$$\downarrow$$

$$\frac{\omega L}{v} = kL = \pi n \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$k = \frac{\pi n}{L}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3,\ldots$$



módy

$n = 1$

$\lambda_1 = 2L \quad \omega_1 = \omega_0$

$n = 2$

$\lambda_2 = L \quad \omega_2 = 2\omega_0$

$n = 3$

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad \omega_3 = 3\omega_0$

$n = 4$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}L \quad \omega_4 = 4\omega_0$

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = n\omega_0 \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\omega_0 = \pi\frac{v}{L}$$ základní frekvence

Stojaté vlnění

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = n\omega_0 \qquad n = 1,2,3,\dots$$

$$\omega_0 = \pi\frac{v}{L}$$ základní frekvence

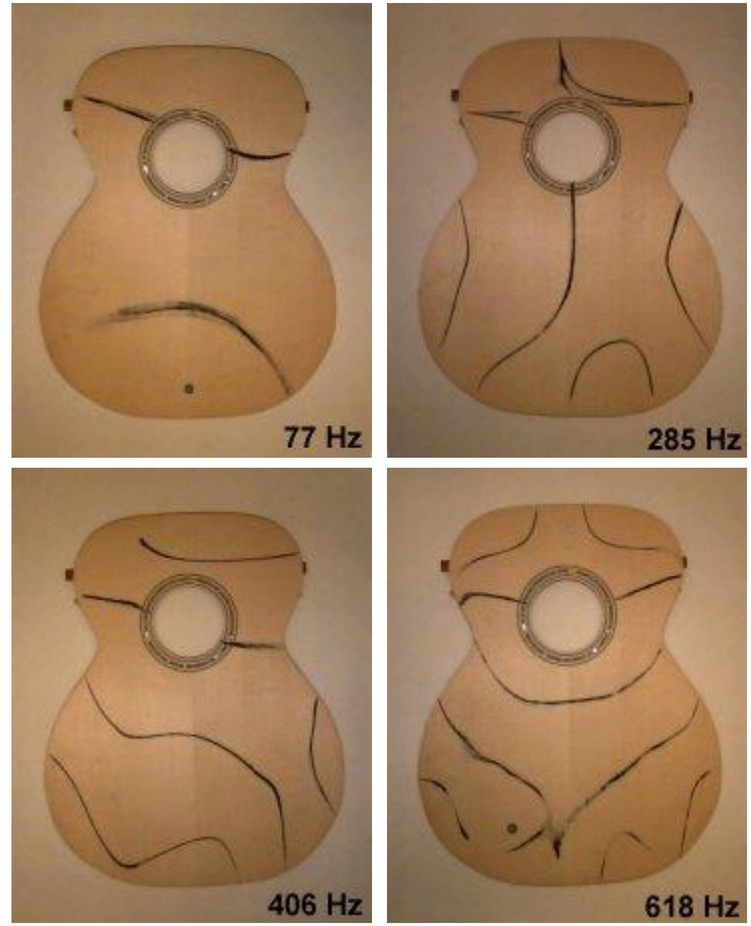
rychlost šíření vlny ve struně

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

F_t – napěťová síla struny
μ – hmotnost struny na jednotku délky

základní frekvence

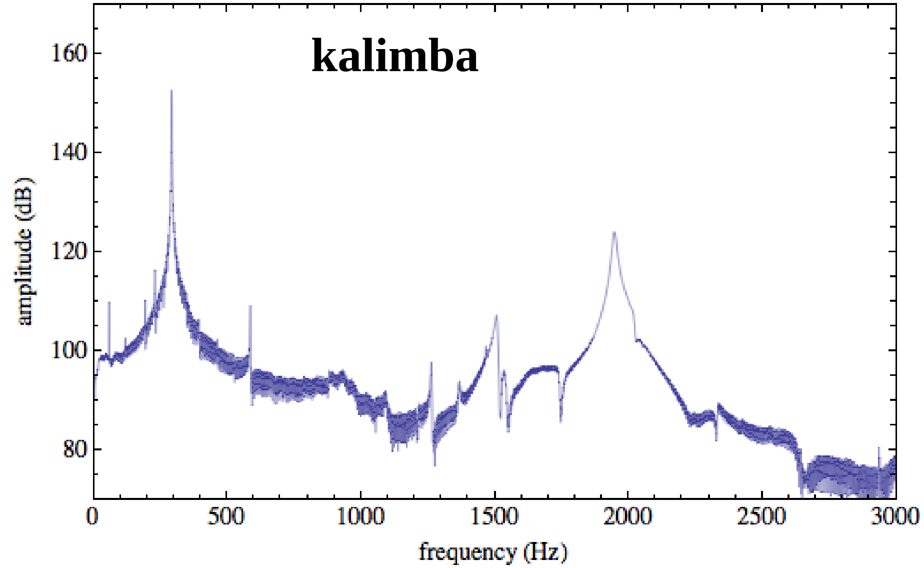
$$\omega_0 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

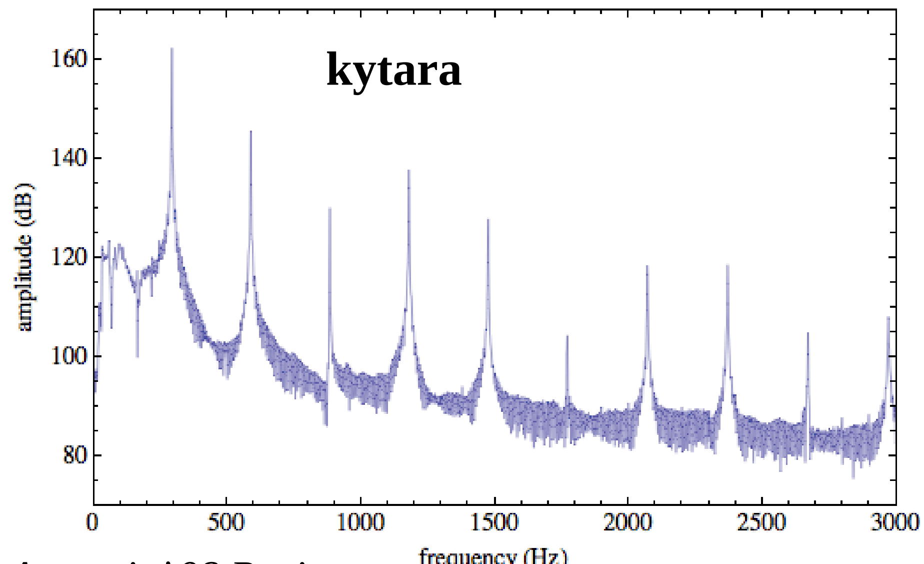


Chladniho obrazce na ozvučné desce kytary

Stojaté vlnění

- **tón D4**
- 293.7 Hz

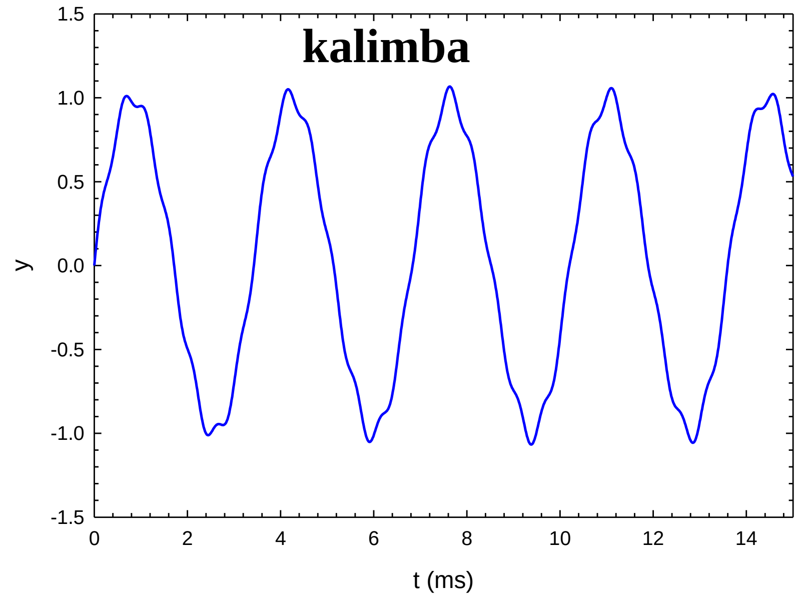


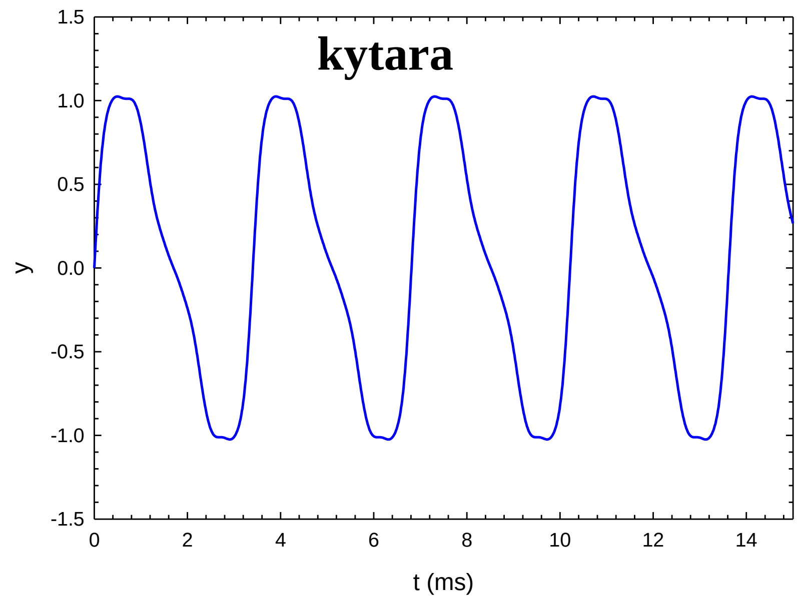


D. Chapman, Acoustic'08 Paris

Stojaté vlnění

- **tón D4**
- 293.7 Hz





Fourierova řada

- periodickou funkci můžeme napsat jako součet harmonických vln

$$f(t) = f(t+T)$$

- **Fourierova řada**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

jediný nenulový člen

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{a_0}{2}\cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_1 \cos(\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \ldots + \overbrace{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos^2(m\omega t)\mathrm{d}t}^{\frac{a_m}{2}} + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b_1 \cos(\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t + \ldots + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b_m \cos(m\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t + \ldots$$

Fourierova řada

- periodickou funkci můžeme napsat jako součet harmonických vln

$$f(t) = f(t+T)$$

- **Fourierova řada**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- **Fourierovy koeficienty**

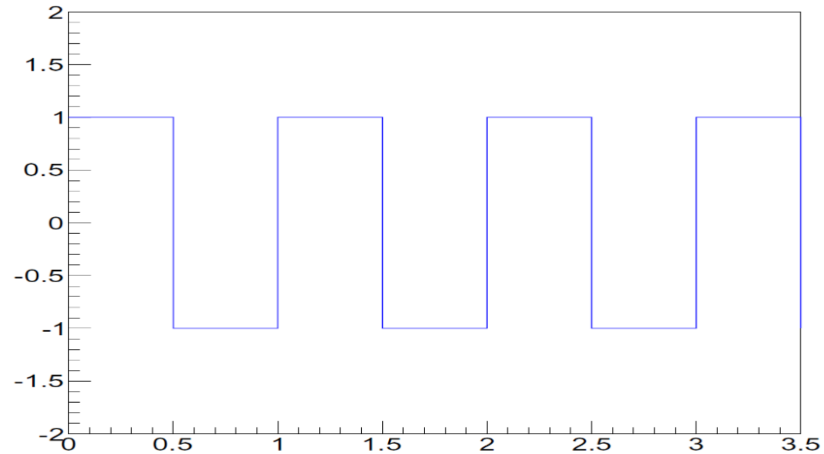
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity



$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)\omega t\right]$$

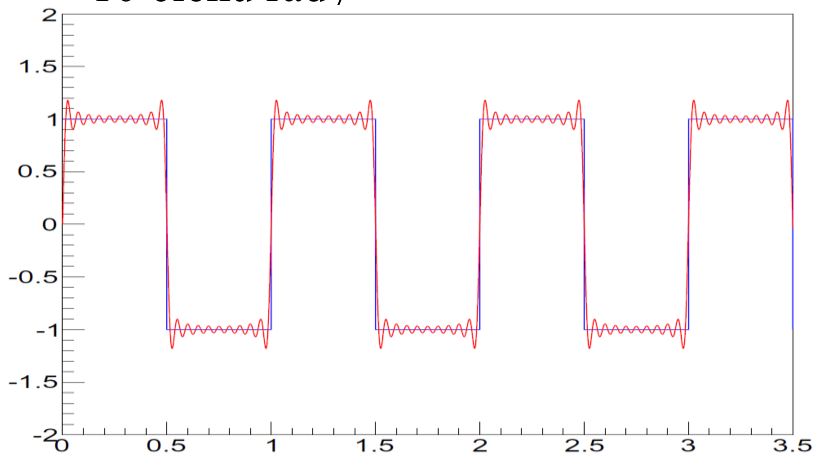
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity

10 členů řady

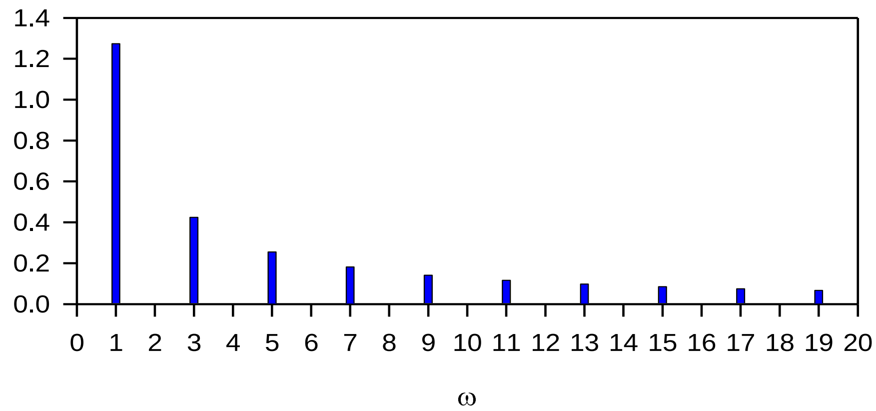


$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

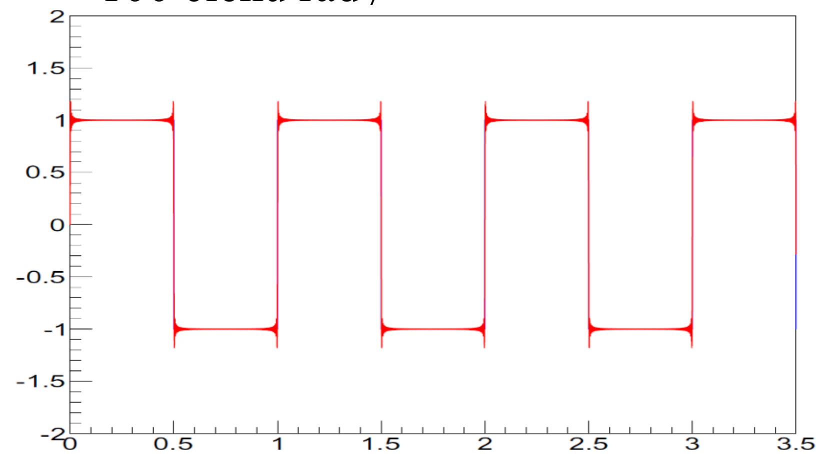
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity

100 členů řady



$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)\omega t\right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$